群論概念の知的必要性を生じさせる指導デザイン

兵庫教育大学 濵中裕明

北海道教育大学 大滝孝二

高知大学教育学部 袴田綾斗

抽象的代数学の難しさ

- 数などの慣れ親しんだ計算がもつ性質を継承する代数構造（群・環・体）を学ぶ.
- その難しさは多くの研究で指摘されてきている (Dubinsky et al., 1994; Hausberger, 2017, 2018; Bosch et al., 2018).
- 通常，群はそのような代数構造のうちもっとも単純で，最初に学ぶもの，と思われがち（数学者からは）.
- だが，本当にそうだろうか.

群論の難しさ

- 通常の数や式の計算：
  - 加減と乗除の２系統の演算がある.
  - 乗除は可換である.
- 群：
  - １つしか演算がない.
  - 非可換であることが一般的.

１つしか演算がないこと，その演算が非可換であること，といった性質がアプリオリに内在する必然的状況への対面を，学生は原体験として持っていない.

実際，Boschら(2018)はATD（教授人間学）の観点から，大学における群論の学習は多くの場合，存在理由（*raison d'être*）を不問にしているのではないかと指摘する.

群論の群論による，群論のための学習？

ATD
(Anthropological theory of the didactic)

- Yves Chevallardによる.
- 教授学的転置理論に端を発し，発展してきた理論.
- その主要な枠組みの一つにpraxeologyがある：人間の行為の背景となる「知」をモデル化するもの.
- Praxeology：実践的側面(praxis)と理論的側面(logos)を持つ.

Praxeology

実践：Praxis

- T（タスクタイプ）
  人間の行為としてのタスク
- τ（テクニック）
  上記のタスクを成し遂げることを可能とする方法．テクニック

理論：Logos

- θ（テクノロジー）
  テクニックを正当化し，理解できるようにする知識.
- Θ（セオリー）
  テクノロジーを支える背景的理論.

Boschら(2018)の指摘

- 大学での群論の教授学習は次の２つの性格を有する.

１．群論のプラクセオロジーは常に理論部分から始まる：

２．タスクタイプは主として内的である：

「作品訪問」の教授パラダイムの範疇にある

世界探究パラダイムへの転換を図るにはどうすればよいか

目指すべき指導デザイン

１．教授学習においてプラクセオロジーは，外的なタスクタイプからスタートするべき：

２．タスクに取り組むことで，テクニック・テクノロジーが引き出される展開：

一方で，ここで提案する指導デザインは群の導入部分であるため，公理的定義などの完全な抽象化までは射程に入っていない.

群論へ向かう前段階としての指導デザイン

- 高校「ベクトル」
  - 数や式とは全く異なる演算体系.
  - 平面ベクトルなど，既知の概念を用いて構成的方法で導入される.
  - ベクトルそのものの計算が主.

対称群に関するタスク

- 大学「線形代数」
  - ベクトルそのものより，ベクト
    空間に関する性質が主.

- 大学「群論」

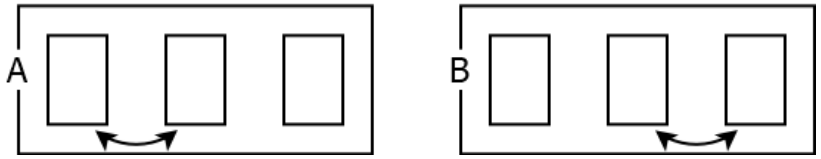
・対象となったのは，教育大の３年生３名.
・2019年度前期のゼミ.
・集合論についての基礎（写像・単射・全射・同値関係・商集合）は学習済み
・最初の７回のゼミの展開を紹介する.

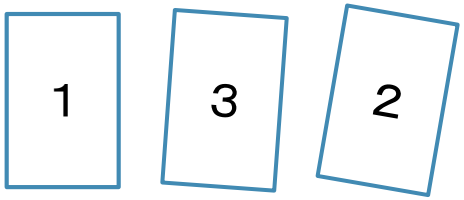
第１回：原初の問題

１～ｎの数が書かれたｎ枚のカードを横一列に並べる．指定された操作方法のみで，これを小さい順に並び替える．なるべく少ない手順で並び替えたい．

- この種の問題をゼミでは「パズル」とよんだ．
- はじめに与えたパズル：

Puzzle 1: 3 cards with following two operations A and B

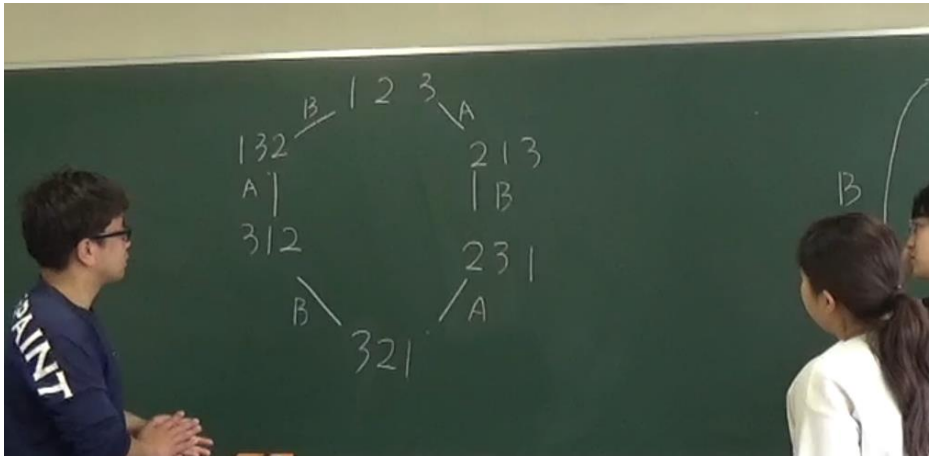




- 想定される解決方法：Cayleyグラフを描く．

学生はCayleyグラフなど知らないが，この問題状況ではそうした方法を考え出すと期待した．

第１回：学生の反応



- 「順列は６個しかないんだから，全部書いてみればいいじゃん」

- 実際，彼らは自分たちでCayleyグラフに相当する図を描き始めた.

「321から戻すには，Bが１回とAが２回いる」

「AとBは交互にやらないと意味がない．Ａ２回連続は無意味」

- この時点では，二項演算を意識していない（操作の合成を代数表現ではなく日常表現で表す）が，やがて，ABAやBABといった表現を自然と使い始める.
- この時点で，操作の合成の記述方法について協定を結ぶ.

Xの操作をしてからYの操作をすることをXYと表す

・非可換性について確認する.

第１回：学生の反応

- 「Aを繰り返すと何が起こるかを式にするにはどう書けばいい？」
- 「Aの2n+1回の繰り返しはどうかく？」
- 学生「(2n+1)Aかな．あ，まずいな」
- 「Aを２回やるのはAAだよね．３回やったらAAAだ」
- べき乗の形に書いた方がいいことについて協定が結ばれた．

$$A^{2n+1}=A$$

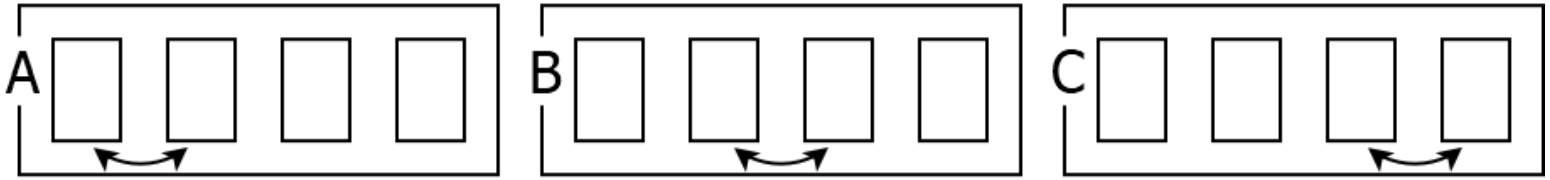
- 「A^{2n}は何もしないことと同じだね．何もしないことはどう表す？」
- 学生「０回の繰り返しだから，０？」
- 「もし０と書いたら，Aと０の合成はAだよね．A０=A？」
- 学生「あぁ，１です．１の方がいいですね」

- このように，パズルの操作（置換）を代数的表現で表し，処理するというテクニックを開発し，使い始めていく．

第２・第３回：元の位数・逆元の導入

- 第２回では次のパズルを扱った.

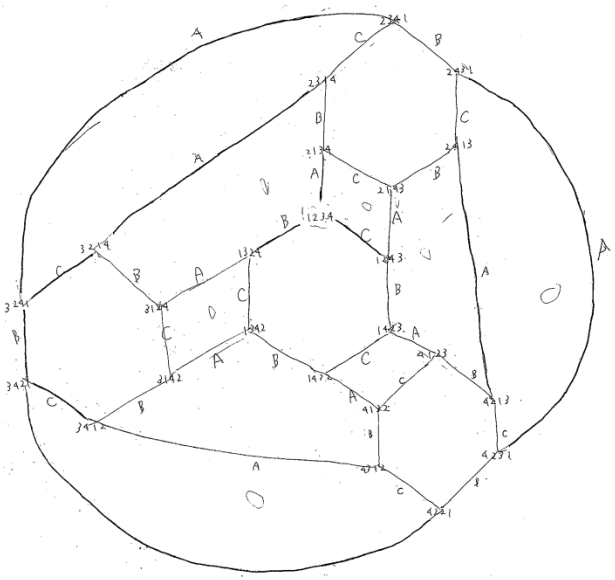
Puzzle 2: 4 cards with following three operations A, B and C



Q. どんな操作も，繰り返し合成するとやがて１になるのだろうか？

- どんな操作Xに対しても，$X^i=X^j$ となる異なる自然数iと j が存在する.

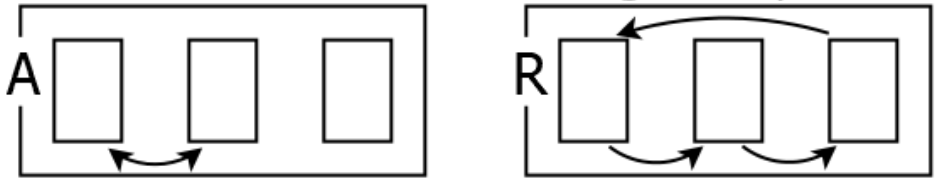
- そこから逆操作（逆元）の概念を導入し，上記のQ. に対する回答に至った.



第２・第３回：元の位数・逆元の導入

- 第３回では次のパズルを扱った.

Puzzle 3: 3 cards with following two operations A and R

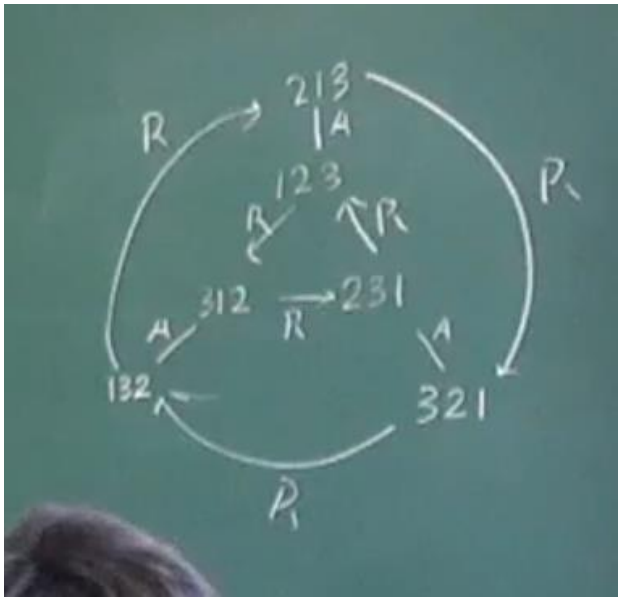


- RとR^{-1}を区別する必要性：逆元への意識化.

- 自然に非可換かつ１つしか演算がない状況での，代数的表現の処理にこなれていった.

- パズルの操作（置換）：

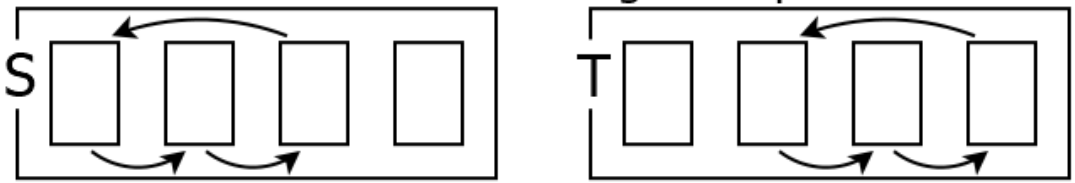
  彼らの中で代数的対象へ.



第４回：生成元への意識

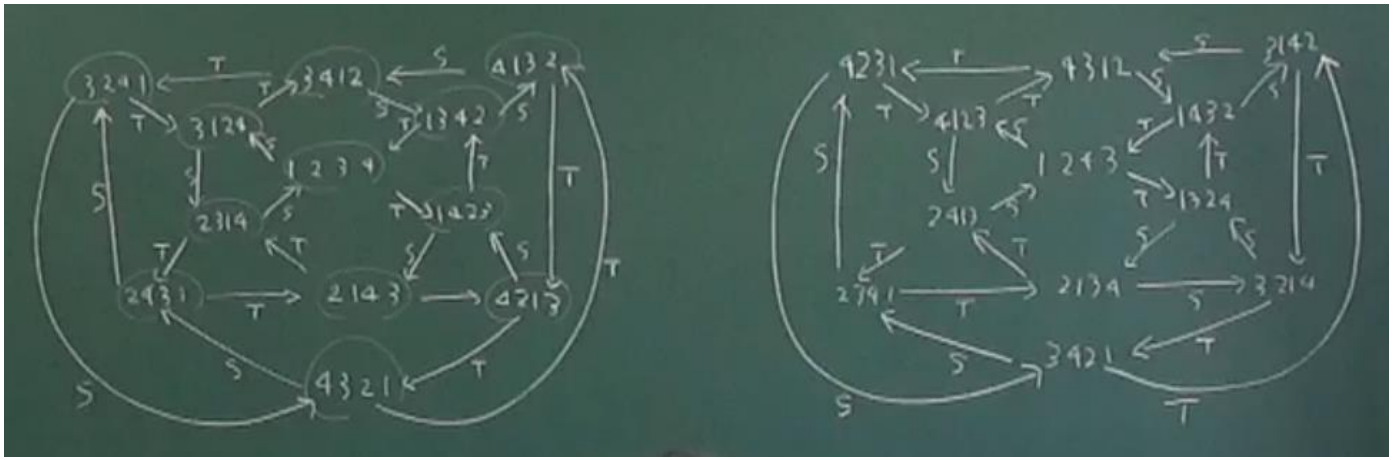
- 第４回では次のパズルを扱った.

Puzzle 4: 4 cards with following two operations S and T



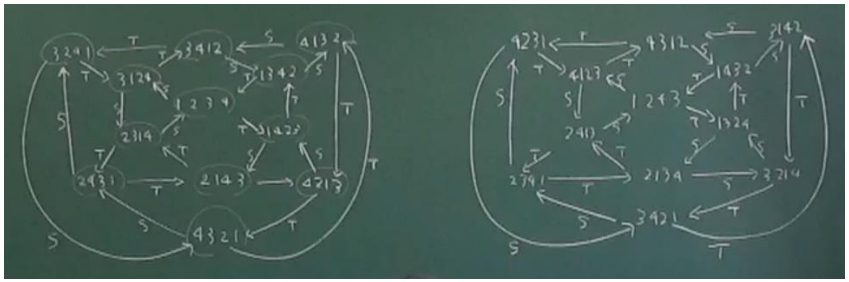
- 今回のパズルでは偶置換しか現れない.
- 学生：

「登場しない順列でもグラフを描いてみると「同じもの」ができる」



第４回：生成元への意識

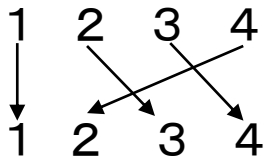
Q. どうしてグラフが２つに分かれるのだろう？これまでのパズルと何がどう違うのだろう？



- 操作とは数学的に何なのかを定式化し，議論を厳密にする必要性
- 学生との協定：

置換，（４次）対称群，操作とは置換である，このゼミでの独自記法

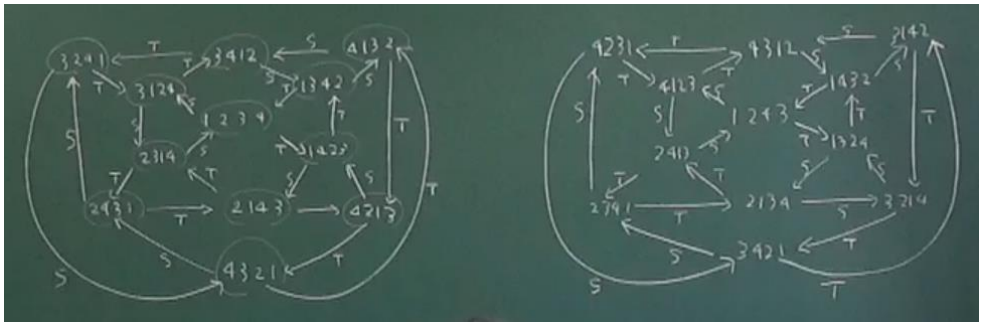
独自記法：
1234は，恒等写像を表す．1423は次の写像を表す．



それによりこれまで漠然と描いていたグラフが何であるのか，厳密に定式化された．

第４回：生成元への意識

そのうえで，改めて，今回のパズルは，これまでのパズルと何がどう違うのかを言葉にすることを学生に求めた．

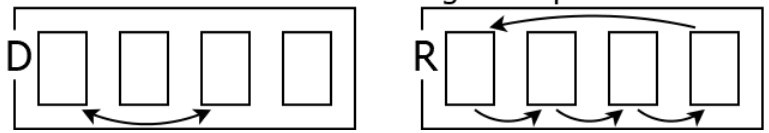


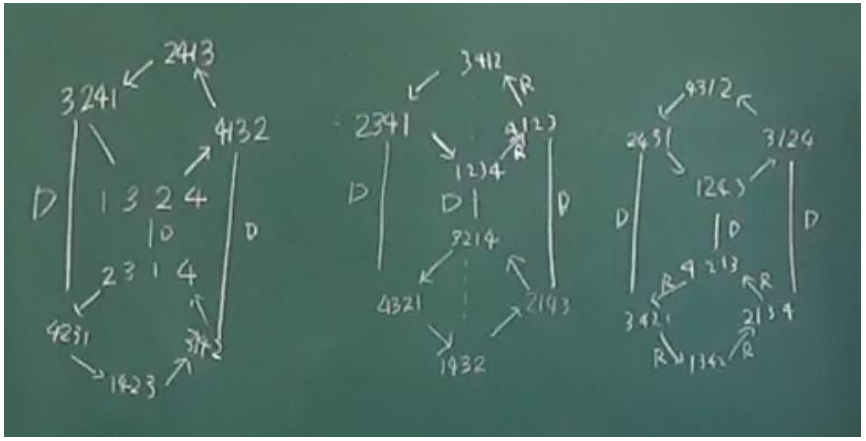
- 学生「パズル２では，すべてのS_4の元がA,B,Cで作られてたんだけど，この場合はそうじゃない」．
- 「作られる，ってどういうこと？きちんと説明して」
- 結局，学生自身が厳密な表現を作り出すことはできなかった．
- だが，次の表現を聞いて心から納得している様子：
- 「パズル２では，S_4のすべての元を，A,B,Cおよびその逆元の有限個の合成で表すことができる」
- この時点でようやく「生成する」という表現の定義を与えた．

第５・第６回：コセット分解と部分群

- パズル４で，なぜグラフが２つの*同じ*連結成分に分かれたのかは明らかではなかった.
- そこで，このグラフの「分裂現象」を，同値関係による商集合として考えてみたらどうか，と提案した.
- また，１つの事例だけでは考察が難しいため，新たな事例の考察を提案した.

Puzzle 5: 4 cards with following two operations D and R



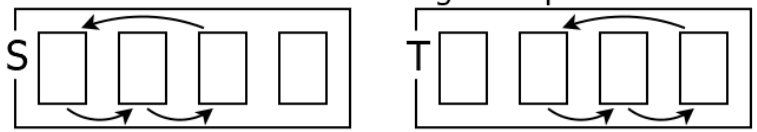


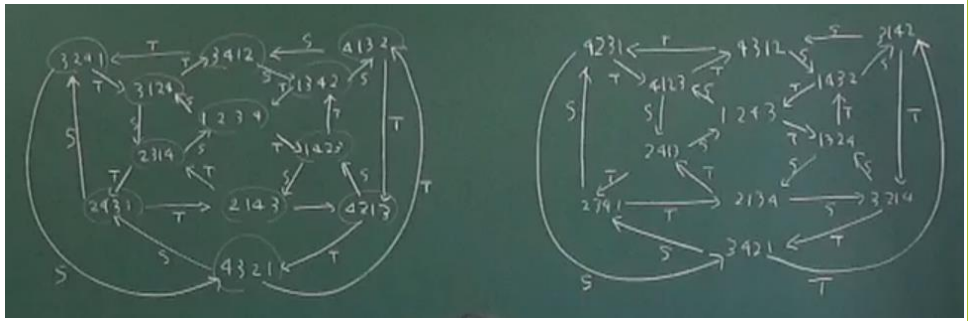
第５・第６回：コセット分解と部分群

- 学生の気づき（パズル４で）

「PとP′が同じグラフ（連結成分）に含まれるのは，SとTを使うとPがP′になれるとき」

Puzzle 4: 4 cards with following two operations S and T



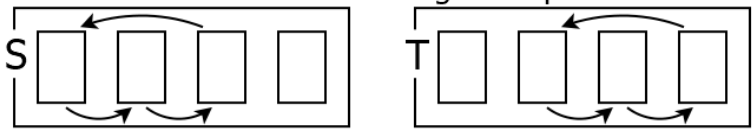


- 議論による精密化を経て，次の２項関係（P〜P′と表す）によって分類されていることが確認された.

「P′は，Pの後にS,T,S^{-1},T^{-1}の有限回の合成を行った形に表せる」

第５・第６回：コセット分解と部分群

Puzzle 4: 4 cards with following two operations S and T



- P～P′ ⇔「P′はPの後にS,T,S^{-1},T^{-1}の有限回の合成を行った形に表せる」

Q. この２項関係は同値関係なのだろうか？

- 反射律，対称律，推移律を確認していく.
- 「S,T,S^{-1},T^{-1}の有限回の合成」の成す集合がもつ性質（部分群の定義に該当）が浮かび上がる.

第５・第６回：コセット分解と部分群

- このとき初めて，$\langle S, T\rangle$という記号，部分群という定義が協定された.
- その後，これまでに調べたパズル（＝生成元の指定された部分群）について，コセット分解を再確認した.

第７回：コセット分解とLagrangeの定理

- コセット分解が４つや５つに分かれるようなS_4の部分群はあるだろうか？という問いが自然に生じる.
- これについて検討することで，自然と剰余類どれも同じ個数の元を含み，コセットの個数はS_4の位数の約数であることが証明された.

Praxeology 分析

セオリーΘ	（一般の群論：生じてない），集合論
テクノロジーθ	S_3,S_4における群論．生成元，部分群，コセット，同値関係
テクニックτ	Cayleyグラフを描く，代数的表現を用いて処理する
タスクT	カード並べパズルを分析し，性質を発見する

- プラクセオロジーの発達は，外的なタスクから始まっている
- そのタスクに対してテクニックが開発されるが，厳密ではなく直観的に生成されている．
- 今回の実践でCayleyグラフは，数の計算における「数直線」のように，彼らのnon-numericな演算を助ける役割を果たした．
- しかし，テクニックが非厳密であるがゆえに，数学的考察を進めるには，必要な概念を定義し，定式化し，考察を行う理論的な場を開発する必要が生じた．
- ただし，まだ一般的な群論までは理論部が発達していない．

考察

１．パズルを分析するというタスクは，部分群によるコセット分解を，Cayleyグラフの分裂という形で視覚化し，その現象の理解のために，部分群やコセット分解という概念が知的存在理由を伴って生じている．

２．今回の実践では，学生が学習対象となる概念（「生成する」，「コセット分解」など）を定義しようと挑戦する場面が見られた．学生がすべてを自分たちで開発したわけではなく，教師の介入は大きいが，彼らは何かを定義しようとしていた．つまり，何か定義されるべきものを認識はしていた．

考察

３．（初歩的な）群論だけでなく，集合論もまた，この実践のなかでは探究のための役割を担うものとなっている．通常，大学数学において集合論は，数学内において数学を構築・学習するための「インフラ」として導入されることが多いのではないいか．しかし，今回はカード並べパズルという数学外の状況を数学化し探究するための主要な手段となっている．

今後の課題と展望

- 今回の実践は，群論の導入にすぎず，彼らが「一般的な」群の概念を学ぶには，また全く違う群と出会いなどを通じて，もう一段の抽象化を経験する必要があるだろう.
- 次に，彼らが群を内在させる状況にであったとき，今回学んだ知識が活性化されるだろうか.
- もう一段の抽象化にむけては，さらなる研究と実践が必要である.

後期の予定

- 上図のような小型変形ルービックキューブを使った群論を展開してみようかと構想中.